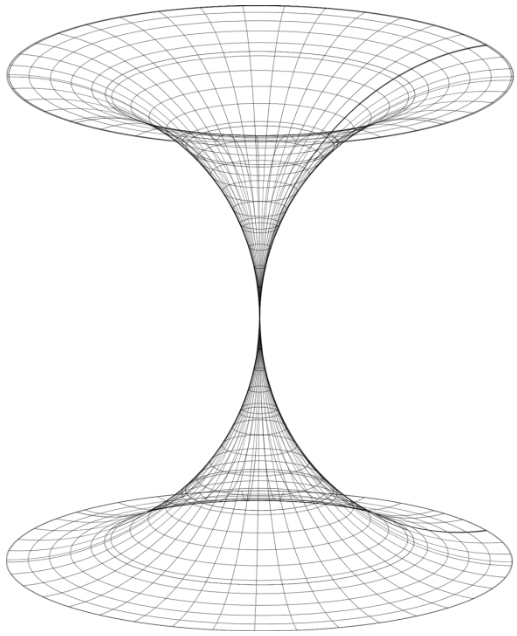
MATEMÁTICAS II

2º BACHILLER

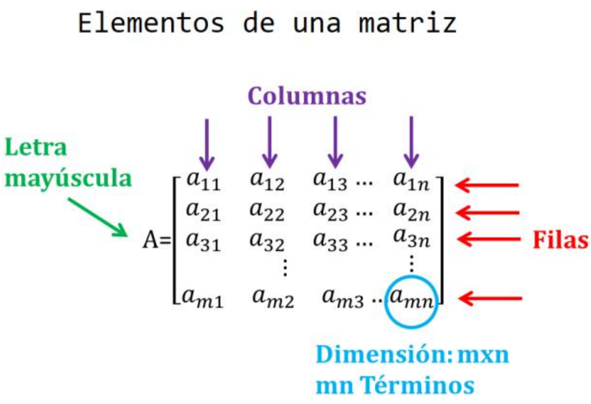


1- MATRICES
2- GEOMETRÍA
3- ANÁLISIS (derivadas e integrales)
4- PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Documento elaborado por: Susana Vallejo Domínguez

1- MATRICES

Una matriz es la forma de escribir un sistema sin poner las incógnitas. Estos números formarán filas y columnas en el orden X, Y y Z.



La forma de escribir un sistema en forma matricial es la siguiente:

$$\text{sistema} \quad \begin{cases} x+4y+3z=12 \\ 2x-3y-z=20 \\ 4x+5y=15 \end{cases}$$

$$\text{matriz de coeficientes} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas las conformarán los términos de la X, Y y Z respectivamente, y el término independiente sólo se pondrá en la matriz aumentada.

Tenemos varios tipos de matrices:

Tipos de Matrices	Ejemplos
Matriz nula. Todos los elementos de la matriz son cero	$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Matriz fila solo tiene una fila	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
Matriz columna Solo tiene una columna	$A=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Matriz Rectangular Tiene distinto número de filas que de columnas	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
Matriz cuadrada Tiene el mismo número de filas que de columnas , se dice que tiene orden n	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Operaciones con matrices

Las matrices se pueden sumar, restar y multiplicar, pero NUNCA dividir entre ellas. Para que estas operaciones se puedan llevar a cabo tienen que cumplirse unos requisitos:

i) Suma de matrices

Tienen que tener, ambas matrices, el mismo número de filas que de columnas.

Véase un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 1+2 \\ 2+5 & 7+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3+7-1 & -1+2-2 \\ 2+3-3 & -4+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ii) Resta de matrices

Al igual que en la suma de matrices, en la resta, ambas matrices tienen que tener el mismo número de filas que de columnas.

Véase un ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 & 1-2 \\ 2-5 & 7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3-7+1 & -1-2+2 \\ 2-3+3 & -4-1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

iii) Multiplicación de matriz por un número

Para multiplicar una matriz por un número, se multiplica cada coeficiente de la matriz por ese número.

Véase un ejemplo:

$$1)\ 2A = 2\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) & 2\cdot 4 \\ 2\cdot(-8) & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -16 & 12 \end{pmatrix}$$

$$1)\ \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot(-2) & \frac{1}{2}\cdot 4 \\ \frac{1}{2}\cdot(-8) & \frac{1}{2}\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vamos a practicar un poco lo aprendido!!

1. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula $E = 2A - 3B + C - 2D$.

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -12 & 3 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 2 & 10 \\ 12 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -18 \\ 16 & -15 & -23 \end{pmatrix}$$

2. Efectúa todos los posibles productos entre las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot C = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}; \quad A\cdot D = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}; \quad B\cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -5 & 26 & 13 \end{pmatrix}$$

$$C\cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 39 & 3 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}; \quad D\cdot C = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 2 & 5 \\ 26 & 5 & 2 & 0 \\ 28 & 38 & -1 & 10 \end{pmatrix}; \quad D\cdot D = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 4 & 31 & 4 \\ -4 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

Vamos a practicar un poco lo aprendido!!

Ejercicios de operaciones de suma y resta con matrices:

1- Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Realizar las siguientes operaciones:

a) A+B-C
b) A-3B
c) 2A-2B+3C
2- Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

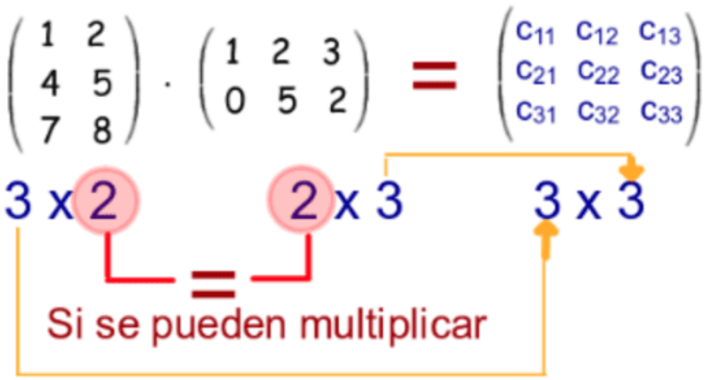
Realizar las siguientes operaciones:

a) 2A+B
b) A-B-2C
c) 3A+5B-4C

iv) Multiplicación de 2 matrices

Para poder multiplica dos matrices se tiene que cumplir que <u>una matriz tiene que tener el MISMO NÚMERO DE FILAS que COLUMNAS tiene la otra matriz.</u>

Véase un ejemplo:



Se multiplica cada término de la primera fila por cada término de la primera columna y se suman entre ellos, dando lugar al nuevo término de la matriz multiplicación.

Ahora veamos un ejemplo resuelto de cómo lo haríamos con matrices cuadradas:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1 & 2\cdot 0+0\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 3\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 1 & 3\cdot 0+0\cdot 2+0\cdot 1 & 3\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 0 \\ 5\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 1 & 5\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot 1 & 5\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

NOTA: La multiplicación de matrices no es conmutativa!!

$A \cdot B \neq B \cdot A$

Una matriz multiplicada por su inversa nos da la matriz identidad.

$A \cdot A^{-1} = I$

Vamos a practicar un poco lo aprendido!!

Calcula la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, y comprueba que se cumple que $AA^{-1} = I$ y que $A^{-1}A = I$.

La matriz identidad:

$$I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{4x4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos a practicar un poco lo aprendido!!

Ejercicios de operaciones de multiplicaciones con matrices:

1- Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula:

a) A*B
b) A*C
c) B*C
d) A*A=A^2

b) Matriz traspuesta

La matriz traspuesta es aquella matriz en la que cambiamos las filas por las columnas, les damos la vuelta a la matriz y se escribe como A^T.

Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

1. Escribe las matrices traspuestas de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix} \qquad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad E^t = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad F^t = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a practicar un poco lo aprendido!!

Calcula la matriz traspuesta de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Determinante de una matriz

El determinante de una matriz es el valor numérico que obtenemos de la matriz aplicando la regla de Sarrus, regla de la estrella. Calculando el determinante de una matriz podemos saber el rango de una matriz, calcular la matriz inversa, o resolver por Cramer un sistema matricial.

Veamos cómo se calcula el determinante de una matriz de orden 2:

Determinante

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

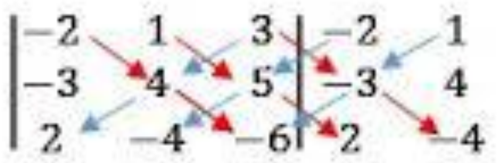
$$\det A = |A| = (4)(2) - (1)(6)$$

$$|A| = 8 - 6 = 2$$

Veamos ahora un ejemplo de cálculo del determinante de una matriz de orden 3:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot 4\cdot(-6) + 1\cdot 5\cdot 2 + 3\cdot(-3)\cdot(-4) -$$
$$-3\cdot 4\cdot 2 - (-2)\cdot 5\cdot(-4) - 1\cdot(-3)\cdot(-6) =$$
$$= 48 + 10 + 36 - 24 - 40 - 18 = \mathbf{12}$$



Empezamos por la izquierda, y después seguimos por la derecha.

Vamos a practicar un poco lo aprendido!!

Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Propiedades de los determinantes:</u>

1.- El determinante de una matriz A y el de su traspuesta A^t son iguales.

$$|A^t| = |A|$$

$$|A| = |A^t| = -2$$

2.- $|A| = 0$ Si:

Posee dos filas (o columnas) iguales.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Todos los elementos de una fila (o una columna) son nulos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Los elementos de una fila (o una columna) son combinación lineal de las otras.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$F_3 = F_1 + F_2$$

Y, cuando el determinante de una matriz es 0, no tiene matriz inversa!!!

3.- Un determinante triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$$

4.- Si en un determinante se cambian entre sí dos filas (o dos columnas), su valor sólo cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad F_1 \leftrightarrow F_2$$

5.- Si a los elementos de una fila (o una columna) se le suman los elementos de otra multiplicados previamente por un número real, el valor del determinante no varía.

Es decir, si una fila (o una columna) la transformamos en una combinación lineal de las demás, el valor del determinante no varía.

6.- Si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila (o cualquier columna), pero sólo una.

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \cdot 2 & 1 & 2 \\ 1 \cdot 2 & 2 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

7.- Si todos los elementos de una fila (o columna) están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes en los que las demás filas (o columnas) permanecen invariantes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a+b & a+c & a+d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & a & a \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ b & c & d \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

8.- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

d) Matriz inversa

La matriz inversa es la matriz cuyo producto con su matriz original nos da la matriz identidad, $A*A^{-1} = I$ ¿Cuál es la matriz identidad? Es aquella que tiene 1s en la diagonal y restos en los triángulos que se forman en la matriz.

La matriz identidad:

$$I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_{4x4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veamos ahora cuáles son los pasos para calcular la matriz inversa. Para ello lo haremos con un ejemplo:

1- Calculamos el determinante de la matriz, si el determinante da 0, la matriz no tiene matriz inversa.
2- Calculamos la matriz traspuesta (A^T) cambiando filas por columnas.
3- Calculamos los adjuntos de la matriz traspuesta $Adj(A)^T$. Al calcular los adjuntos vamos a cambiar los números siguiendo la regla de la serpiente (+ - + - …), es decir, empiezas por el primer adjunto y no le cambias el signo, al segundo sí, al tercero no, al cuarto sí, etc.

Cálculo de la matriz adjunta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Sustituimos cada elemento por su adjunto:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Fíjate que cogemos la primera fila y la primera columna y las tachamos y nos queda el determinante de orden 2 que es el primer adjunto; seguimos con primera fila y segunda columna y nos vuelve a quedar un determinante de orden 2… y así con todas las filas y columnas hasta hacer la matriz nueva. Después se calculan los determiantes de orden 2 y se cambian los signos siguiendo el orden de la serpiente (+ - + - …) y tenemos la matriz adjunta.

****Fíjate cómo cambian los signos en los adjuntos de la nueva matriz!!!**

4- Dividimos la adjunta de la traspuesta por el determinante de la matriz y tenemos la inversa:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)t}{IAI}$$

Veamos ahora con un ejemplo el cálculo de la matriz inversa de una matriz:

$$\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \det(A) = 3 \\ Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **En este ejemplo se hace primero la adjunta y después la traspuesta, eso es indiferente.**

Vamos a practicar un poco lo aprendido!!

Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices, siguiendo todos los pasos e indicando el determinante y la matriz adjunta de cada matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Resolución de ecuaciones con matrices

f) Rango de una matriz

g) Resoluciones de sistemas de matrices por el método de Cramer