

INTEGRALES POR PARTES 5

Cuando tenemos una integral de una función complicada o de producto de dos funciones en la que una no tiene nada que ver con la otra, los resolvemos por partes.

Para ello hay una fórmula:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

y un truco, al aplicar la fórmula no podemos llegar a una integral más complicada que la del principio.

Veamos unos ejemplos:

$$\int x^2 \cdot \ln x \, dx$$

$$u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^2 \cdot dx \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

$$\ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C$$

$$\int x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = \cos x \rightarrow du = -\sin x \, dx$$

$$dv = x \, dx \rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\cos x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot (-\sin x) \, dx$$

es más complicado, tenemos que hacer la distribución de u y dv!!

repetimos:

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \sin x$$

$$x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot dx = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int x \cdot e^x \, dx$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x \, dx \rightarrow v = e^x$$

$$x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

$$e^x (x - 1) + C$$

$$\int \cos x \cdot \ln(\sin x) \, dx$$

$$u = \ln(\sin x) \rightarrow du = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \, dx$$

$$dv = \cos x \, dx \rightarrow v = \sin x$$

$$\ln(\sin x) \cdot \sin x - \int \sin x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x \, dx$$

$$\ln(\sin x) \cdot \sin x - \int \cos x \, dx =$$

$$\ln(\sin x) \cdot \sin x + \sin x + C = \sin x (\ln(\sin x) + 1) + C$$

$$\int \ln(1/x) \, dx$$

$$u = \ln(1/x) \rightarrow du = \frac{1}{1/x} \, dx = -x \, dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$\ln(1/x) \cdot x - \int x \cdot (-x) \, dx = x \cdot \ln(1/x) - \int x^2 \, dx =$$

$$= x \cdot \ln(1/x) - \frac{x^3}{3} + C = x \left(\ln(1/x) - \frac{x^2}{3} \right) + C$$

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx$$

$$dv = \sin x \, dx \rightarrow v = -\cos x$$

$$x^2 \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot 2x \, dx$$

hacemos partes otra vez

$$u = 2x \rightarrow du = 2 \, dx$$

$$dv = -\cos x \, dx \rightarrow v = -\sin x$$

$$2x \cdot (-\sin x) - \int -\sin x \cdot 2 \, dx =$$

$$= -2x \cdot \sin x - 2 \cos x$$

$$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

$$\int x^2 \cdot e^x \, dx$$

$$u = x^2 \rightarrow du = 2x \, dx$$

$$dv = e^x \, dx \rightarrow v = e^x$$

$$x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \, dx =$$

hacemos partes otra vez

$$u = 2x \rightarrow du = 2 \, dx$$

$$dv = e^x \, dx \rightarrow v = e^x$$

$$2x \cdot e^x - \int e^x \cdot 2 \, dx =$$

$$= 2x \cdot e^x - 2e^x$$

$$= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx$$

$$u = \cos x \rightarrow du = -\sin x \, dx$$

$$dv = e^x \, dx \rightarrow v = e^x$$

$$\cos x \cdot e^x - \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx$$

volvemos a hacer partes

$$u = -\sin x \rightarrow du = -\cos x \, dx$$

$$dv = e^x \, dx \rightarrow v = e^x$$

$$-\sin x \cdot e^x - \int e^x \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$= \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x - \int e^x \cdot \cos x \, dx = \int e^x \cdot \cos x \, dx$$

$\Rightarrow$ integral cíclica!!

$$\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x = 2 \int e^x \cdot \cos x \, dx$$

$$\int e^x \cdot \cos x \, dx = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2} + C$$

$$\int \sin(\ln x) \, dx$$

$$u = \sin(\ln x) \rightarrow du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$x \cdot \sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$x \cdot \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx$$

volvemos a hacer partes:

$$u = \cos(\ln x) \rightarrow du = -\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$x \cdot \cos(\ln x) - \int 1 \cdot (-\sin(\ln x)) \, dx =$$

$$= x \cdot \cos(\ln x) - x \sin(\ln x) - \int 1 \cdot \sin(\ln x) \, dx = \int \sin(\ln x) \, dx$$

$$\int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x (\cos(\ln x) - \sin(\ln x))}{2} + C$$

$$\int \ln(x^2 + 1) \, dx$$

$$u = \ln(x^2 + 1) \rightarrow du = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \, dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

$$x \cdot \ln(x^2 + 1) - \int x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \, dx =$$

$$= x \cdot \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1} \, dx$$

$\hookrightarrow$ integral racional,

$$\frac{2x^2}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 2 - 2}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) - 2}{x^2 + 1}$$

$$= 2 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{0}{d} = \int \frac{d}{d} C + \int \frac{R}{d}$$

$$\int \frac{2x^2}{x^2 + 1} \, dx = \int 2 \, dx + \int \frac{-2}{x^2 + 1} \, dx =$$

$$= 2x - 2 \arctan x$$

$$= x \cdot \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \arctan x + C$$