1 Posiciones relativas y puntos de corte

El término “posición relativa” hace referencia a la manera en que un cuerpo está colocado con respecto a otro. En el caso de planos y rectas, hace referencia a si estos son paralelos, secantes o coincidentes entre ellos. Para estudiar las posiciones relativas de planos y rectas, podremos emplear dos métodos diferentes: en el primero, nos serviremos del teorema de Rouché-Frobenius, visto en matrices, y en el segundo, compararemos vectores directores y normales, y analizaremos los puntos por los que pasan los elementos geométricos a analizar.

PREGUNTA MUY TÍPICA DE PAU

Ejercicios relacionados con las posiciones relativas, junto al cálculo de puntos de corte son extremadamente típicos en la PAU: desde 2020 solo ha habido una convocatoria en la que no haya habido un ejercicio de este estilo. Son especialmente típicos los que involucran dos rectas o una recta y un plano. Son recurrentes los ejercicios que piden estudiar la posición relativa en función a parámetros (ej: segundo ejercicio resuelto del tema, “PAU 2026, MODELO”), por lo que conviene prestarles atención.

1.1 Posición relativa recta-recta

1.1.1 Método 1: Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius

Para estudiar la posición relativa de dos rectas, utilizaremos la ecuación general de ambas. Con ellas formaremos dos matrices: una cuadrada, de orden 4x4, la cual será la matriz ampliada (A), y otra, de orden 4x3, que será la matriz de coeficientes (C).

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \qquad A\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ E & F & G & H \\ E' & F' & G' & H' \end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ E & F & G \\ E' & F' & G' \end{pmatrix}$$

$$s: \begin{cases} Ex + Fy + Gz + H = 0 \\ E'x + F'y + G'z + H' = 0 \end{cases}$$

Veamos las diferentes posiciones relativas que pueden tener las rectas entre sí:

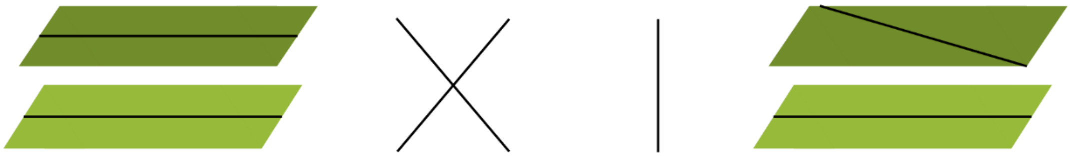
1 **Paralelas:** Son rectas que tienen la misma dirección, pero no comparten ningún punto., es decir, el sistemas de ecuaciones que forman no tiene solución, es incompatible. Según el teorema de Rouché-Frobenius, esto se daba cuando Rg A > Rg C. Las rectas serán paralelas cuando **Rg A = 3 y Rg C = 2.**

2 **Secantes** (o que se cortan): Comparten un único punto, es decir, el sistema de ecuaciones que generan tiene una única solución, es sistema compatible determinado. Siguiendo el teorema de Rouché-Frobenius, ambas matrices deberán tener el mismo rango y este deberá ser igual al rango máximo de la matriz de coeficientes, es decir, **Rg A = Rg C = 3.**

3 **Coincidentes**: Comparten todos los puntos, es decir, el sistema que formen sus ecuaciones deberá tener infinitas soluciones: será compatible indeterminado. Según el teorema de Rouché-Frobenius, esto ocurrirá cuando el rango de ambas matrices sea igual pero inferior al número de incógnitas, es decir, **Rg A = Rg C = 2.**

4 **Se cruzan**: Tienen diferente dirección, pero no comparten ningún punto. Debe, para ello, cumplirse que Rg A > Rg C, en este caso, **Rg A = 4** y **Rg C = 3.**

Las rectas se representan en negro. En algunos casos se han dibujado en verde los planos que contienen a las rectas para que se pueda entender mejor la posición de estas



1.1.2 Método 2: Analizando vectores directores y puntos de paso

1. Si los vectores directores son paralelos, tendrán la misma dirección, lo cual implica que serán **paralelas** o **coincidentes**. De ser la primera opción, no existiría ningún punto en común entre ambas rectas, por lo que nuestra comprobación consistirá en tomar un punto de una de las rectas, y sustituirlo en la ecuación de la otra:
   - Si el punto introducido cumple la ecuación de la otra recta, ambas serán coincidentes.
   - Si el punto escogido no cumple la ecuación de la otra recta, serán rectas paralelas.
2. Si no fueran paralelos, no tendrían la misma dirección y por lo tanto serán **secantes** o se **cruzarán**. Para poder discernir cuál de estas opciones es la correcta, estudiaremos la existencia de punto de corte: si existe, las rectas serán secantes, y si no, se cruzarán.

   Dentro de las rectas secantes existe un tipo especial: las rectas perpendiculares, que pueden ser identificadas porque sus vectores directores son perpendiculares entre ellos, por lo que su producto escalar será igual a cero, tal y como vimos en el tema 1.

1.1.3 Punto de corte de dos rectas

Cuando dos rectas son secantes, estas se cortan en un punto, el cual se conoce como **punto de corte**, y debemos conocer cómo se calcula. Pongamos que tenemos una recta r y otra recta s, en las que utilizaremos la notación (x_s, y_s, z_s) y (x_r, y_r, z_r) para diferenciar los puntos por los que pasa cada una. En primer lugar, debemos plantear las ecuaciones paramétricas de ambas rectas:

$$s: \begin{cases} x_s = a + \gamma \cdot v_{1s} \\ y_s = b + \gamma \cdot v_{2s} \\ z_s = c + \gamma \cdot v_{3s} \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x_r = d + \mu \cdot v_{1r} \\ y_r = e + \mu \cdot v_{2r} \\ z_r = f + \mu \cdot v_{3r} \end{cases}$$

Debemos entender que es un punto que cumplirá ambas ecuaciones de la recta, ya que las dos pasan por él. Por ello, en ese punto ocurrirá que $x_s = x_r$, $y_s = y_r$, $z_s = z_r$. Haciendo estas igualaciones podremos calcular los parámetros γ y μ correspondientes al punto de corte. Como tenemos dos incógnitas por resolver, tomaremos solo dos de las tres ecuaciones:

$$x_s = x_r \rightarrow a + \gamma \cdot v_{1s} = d + \mu \cdot v_{1r}$$

$$y_s = y_r \rightarrow b + \gamma \cdot v_{2s} = e + \mu \cdot v_{2r}$$

Una vez hayamos calculado μ y γ, utilizaremos la tercera ecuación (la correspondiente a la incógnita z) para verificar el resultado obtenido. Si con los valores hallados de μ y γ obtenemos el mismo resultado de z en ambas ecuaciones, efectivamente existe punto de corte. No obstante, de no coincidir, no habrá intersección de las rectas. Finalmente, para calcular el punto de corte, sustituiremos uno de los parámetros por su valor en la ecuación de la recta correspondiente.

EJERCICIO RESUELTO

(PAU 2020, ORDINARIA) Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones r: $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y s: $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

En primer lugar, determinaremos si sus vectores directores son paralelos:

$\overrightarrow{v_{dr}}$ = (2, -1, -2)

$\overrightarrow{v_{ds}}$ = (1, 4, 3)

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4} \neq \frac{-2}{3}$$

No son paralelos, por lo que las rectas serán secantes o se cruzarán. Estudiamos la existencia de punto de corte:

$$s: \begin{cases} x_s = \gamma \\ y_s = -3 + \gamma \cdot 4 \\ z_s = -2 + \gamma \cdot 3 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x_r = 3 + \mu \cdot 2 \\ y_r = -\mu \\ z_r = -1 - 2 \cdot \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_s = x_r \rightarrow \gamma = 3 + \mu \cdot 2 \xrightarrow{\text{Sustituimos } \mu \text{ por el valor obtenido}} \gamma = 3 + (-1) \cdot 2 \rightarrow \gamma = 1 \\ y_s = y_r \rightarrow -3 + \gamma \cdot 4 = -\mu \xrightarrow{\text{Sustituimos el valor de } \gamma \text{ por su expresión en la primera ecuación}} -3 + (3 + \mu \cdot 2) \cdot 4 = -\mu \rightarrow \\ \qquad -3 + 12 + 8\mu = -\mu \rightarrow 9 = -9\mu \rightarrow \mu = -1 \end{cases}$$

Comprobamos si con los valores de γ y μ obtenidos se cumple que $z_s = z_r$:

$$-2 + 1 \cdot 3 = -1 - 2 \cdot (-1) \rightarrow 1 = 1$$

Existe punto de corte y, por lo tanto, las rectas son secantes. Calculamos el punto de corte sustituyendo el valor de γ obtenido en la recta s (*también podríamos hacerlo sustituyendo el valor de μ en la recta r y obtendríamos el mismo resultado).*

$$s: \begin{cases} x_s = 1 \\ y_s = -3 + 4 \\ z_s = -2 + 3 \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x_s = 1 \\ y_s = 1 \\ z_s = 1 \end{cases}$$

Las rectas se cortan en el punto (1, 1, 1)

1.2 Posición relativa recta-plano

1.2.1 Método 1: Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius

Se seguirá la misma lógica y metodología aplicada a la posición relativa entre dos rectas. En este caso, las matrices se formarán utilizando la ecuación general de la recta y la del plano, surgiendo una matriz de coeficientes de orden 3x3 y una matriz ampliada de orden 3x4.

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} \qquad A\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ E & F & G & H \end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ E & F & G \end{pmatrix}$$

$$\pi: Ex + Fy + Gz + H = 0$$

- **Paralelos**: No comparten ningún punto, es decir, formarán un sistema incompatible: **Rg A = 3, Rg C = 2**
- **Secantes**: Comparten un único punto, es decir, sus ecuaciones dan lugar a un sistema compatible determinado: **Rg A = Rg C = 3**
- **Recta contenida en el plano**: Comparten infinitos puntos (todos los de la recta), es decir, formarán un sistema compatible indeterminado: **Rg A = Rg C = 2**

Paralelos Secantes Coincidentes

1.2.2 Método 2: Estudiando vectores y puntos

En este caso, estudiaremos el vector director de la recta y el vector normal del plano:

1. Si ambos son perpendiculares, la recta y el plano serán **paralelos** o la **recta estará contenida en el plano**. Nuevamente, determinamos si un punto cualquiera de la recta cumple con la ecuación del plano. De hacerlo, la recta estará contenida en el plano, mientras que, si no la cumple, serán paralelos.
2. Si no son perpendiculares, la recta y el plano serán **secantes**. Dentro de los planos y rectas secantes, un tipo especial son aquellos que se encuentran en posición **perpendicular**, los cuales pueden ser identificados porque el vector director de la recta y el normal al plano son paralelos entre sí.

1.2.3 Punto de corte recta-plano

Para determinar el punto de corte entre una recta y un plano secantes, emplearemos las ecuaciones paramétricas de la recta y la ecuación general del plano. En esta última, sustituiremos “x”, “y” y “z” por sus expresiones en la ecuación paramétrica de la recta, de la siguiente forma:

$$r: \begin{cases} x = a + \mu \cdot v_1 \\ y = b + \mu \cdot v_2 \\ z = c + \mu \cdot v_3 \end{cases} \qquad \pi: \text{Ax + By + Cz + D = 0} \rightarrow$$

$$\text{A}\cdot(a + \mu \cdot v_1) + \text{B}\cdot(b + \mu \cdot v_2) + \text{C}\cdot(c + \mu \cdot v_3) + \text{D} = 0$$

De esta manera, conseguiremos tener tan solo una incógnita en la ecuación del plano: μ. Ten en cuenta que, aunque todos se hayan representado con letras en el ejemplo, el punto (a, b, c), el vector director de la recta y los parámetros A, B y C correspondientes a la ecuación del plano van a ser datos numéricos.

Una vez hayamos calculado μ sustituiremos su valor en la ecuación de la recta y calcularemos los valores correspondientes de “x”, “y” y “z”, siendo estas las coordenadas del punto de corte.

1.3 Posición relativa plano-plano

1.3.1 *Método 1: Aplicando el teorema de Rouché-Frobenius*

Se aplicará el mismo método que en los anteriores apartados, utilizando en este caso las ecuaciones generales de los planos para establecer las matrices, obteniendo una matriz de coeficientes de orden 2x3 y una matriz ampliada de orden 2x4.

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$\pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$$A\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

- **Paralelos**: No compartirán ningún punto, es decir, formarán un sistema incompatible: **Rg A = 2; Rg C = 1**.
- **Secantes**: Compartirán una recta, es decir, infinitos puntos: darán lugar a un sistema compatible indeterminado, en el que los rangos serán iguales pero menores al número de incógnitas: **Rg A = Rg C = 2**.
- **Coincidentes**: Compartirán todos sus puntos, es decir, formarán un sistema compatible indeterminado en el que **Rg A = Rg C = 1**.

Paralelos Secantes Coincidentes

1.3.2 *Método 2: Estudiando vectores y puntos*

En el caso de los planos, compararemos sus vectores normales:

1. Si dos planos fueran **paralelos** o **coincidentes** sus vectores normales serían paralelos. Si, además, un punto por el que pasa uno de los planos cumple la ecuación del otro, serán coincidentes, y si no, paralelos, al igual que ocurría en las rectas.
2. Si sus vectores normales no son paralelos, los planos serán **secantes**. Dentro de los planos secantes, un tipo especial son los planos **perpendiculares**, los cuales pueden ser identificados porque sus vectores normales son perpendiculares entre ellos.

EJERCICIO RESUELTO

(PAU 2026, MODELO) Se consideran el plano π: ax + y + z = 1 y la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$, donde "a" es un parámetro real. Estudie la posición relativa de r y π en función del parámetro "a".

Si $\vec{n}_\pi \cdot \vec{v}_{dr}$ = 0, el plano y la recta tienen la misma dirección: serán paralelos o la recta estará contenida en el plano.

(2, 3, 3)·(a, 1, 1) = 0 → 2·a + 3 + 3 = 0 → 2·a = -6 → a = -3

Tomamos un punto de la recta (tomaremos el (1, 0, -1) y lo sustituimos en la ecuación del plano para a = -3:

-3·1 + 0 - 1 = 1 → -4 ≠ 1

Si a = -3, las direcciones de la recta y del plano coinciden, pero no pasan por los mismos puntos: serán paralelos.

Si $a \neq -3$, las direcciones de la recta y del plano serán diferentes: serán secantes.

Solución alternativa: Plantear las matrices C y A y estudiar sus rangos en función al parámetro "a" (tal y como se hizo en los ejercicios de cálculo de parámetro en sistemas de tres ecuaciones en el bloque de álgebra)

EJERCICIO RESUELTO

(PAU, 2020, EXTRAORDINARIA) Sean r la recta de vector director $\overrightarrow{v_{dr}}(1, 0, 3)$ que pasa por $P(1,0,0)$ y π: $-2x + y + z = 0$. Se pide la posición relativa de r y π. En caso de que se corten, hallar el punto de corte.

Determinamos si el vector director de r y el vector normal de π son perpendiculares:

$$(1, 0, 3)\cdot(-2, 1, 1) = -2 + 0 + 3 = 1 \neq 0$$

Al no ser perpendiculares quiere decir que la recta y el plano tienen direcciones diferentes: se cortarán. Calculamos el punto de corte:

r: $\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 0 \\ z = 3 \cdot \mu \end{cases}$ $\quad \pi: -2x + y + z = 0 \rightarrow -2\cdot(1 + \mu) + 0 + 3\cdot \mu = 0 \rightarrow -2 - 2\mu + 3\mu = 0 \rightarrow \mu = 2$

r: $\begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = 0 \\ z = 3 \cdot 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 6 \end{cases}$ → El punto de corte es (6, 0, 3)

ARUME LABS

EJERCICIO RESUELTO

(PAU 2024, EXTRAORDINARIA) Se considera el plano π: x + 2y – 2z = 0 y la recta r que pasa por los puntos A(2, 1, 2) y B(0, 1, 1). Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano s

$\overrightarrow{v_{dr}} = \overrightarrow{AB}$ = (0, 1, 1) – (2, 1, 2) = (-2, 0, -1)

$$r : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{-1} \quad \begin{cases} \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{0} \rightarrow -2y + 2 = 0 \\ \frac{z-2}{-1} = \frac{y-1}{0} \rightarrow -y + 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -2y + 2 = 0 \\ -y + 1 = 0 \end{cases}$$

Formo las matrices C y A con las ecuaciones del plano y de la recta:

$$C \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudio el Rango de C:

$|C|$ = 0 + 0 + 0 – (0 + 0 + 0) = 0

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$ = 2; Existe un menor en C de orden 2x2 diferente de cero, Rg C =2

Estudio Rango de A:

$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = |C| = 0$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 + 0 + 0 – (0 + 0 + 0) = 0

$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 + 0 – 2 – (-2 + 0 + 0) = 0 $\qquad$ $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ = 0 + 4 + 0 – (0 + 4 + 0) = 0

$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$ = 2 Existe un menor en A de orden 2x2 diferente de cero, Rg A = 2

RgC = RgA = 2 < número de incógnitas. Es un sistema compatible indeterminado según el Teorema de Rouché-Frobenius: la recta está contenida en el plano.

b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π

Si el plano a construir (π') contiene a r, el $\overrightarrow{v_{dr}}$ (-2, 0, -1) es un vector director del plano. Además, todos los puntos de la recta pertenecen al plano, por lo que el punto A(2, 1, 2) formará parte de π'. Además, al ser perpendicular a π, $\overrightarrow{n_\pi}$ (1, 2, -2) tendrá la dirección del plano que vamos a construir, es decir, es su vector director:

$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ = -4z +8 – y + 1 – (-2x + 4 + 4y – 4) → 2x – 5y – 4z + 9 = 0

Solución alternativa para el apartado "a": se determina si el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares. De no serlo, serán secantes, y de serlo, se comprueba si un punto de la recta cumple la ecuación del plano: si la cumple, la recta está contenida en el plano, si no la cumple, son paralelos.

Cuando dos rectas, dos planos o una recta y un plano se cortan, lo hacen formando un **ángulo** determinado, el cual coincidirá con el ángulo formado por sus vectores directores (en el caso de las rectas) o normales (en el caso de los planos). Para su cálculo, utilizaremos la ecuación vista en el tema de vectores para determinar el ángulo formado entre estos: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$.

2 Distancia entre elementos geométricos

Se entiende por la distancia entre dos elementos geométricos como la mínima distancia que hay entre ellos. Así, cuando son coincidentes o secantes, la distancia que habrá entre ellos será cero. Debemos, no obstante, conocer la manera de calcular la distancia que los separa cuando son paralelos o, en el caso específico de las rectas, cuando se cruzan.

2.1 Distancia entre dos puntos

Se calculará uno de los dos vectores que los une (da igual que sea el vector AB que el BA) y determinamos su longitud, es decir, calculamos su módulo.

2.2 Distancia entre un punto y un plano

Será la distancia más corta entre el punto y el plano, y se calculará aplicando la siguiente fórmula:

DISTANCIA ENTRE UN PLANO Y UN PUNTO

$$d(\pi, A) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Donde A, B, C y D se extraen de la ecuación general del plano y x_o, y_o y z_o son las coordenadas del punto

EJERCICIO RESUELTO

(PAU 2025, EXTRAORDINARIA) Se considera el plano π = 2x + 3y + z + 1 = 0 y los puntos A(2, 1, 0) y B(-1, -2, 3). Calcule la distancia del punto A al plano paralelo a π que pasa por B.

Se denotará el plano paralelo a π como π'. Se cumplirá que $\vec{n}_\pi = \vec{n}_{\pi'}$ y que pasa por B:

$\pi' = 2x + 3y + z + D = 0$

$\pi' = 2\cdot(-1) + 3\cdot(-2) + 3 + D = 0 \rightarrow -2 - 6 + 3 + D = 0 \rightarrow$

$D = 5 \rightarrow \pi' = 2x + 3y + 1z + 5 = 0$

$$d(\pi', A) = \frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|2\cdot 2+3\cdot 1+1\cdot 0+5|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{14}} = \frac{15}{\sqrt{14}} \text{ u}$$

Antes de nada, recordamos...

Ecuaciones con valor absoluto

Las ecuaciones en las que encontramos un valor absoluto siempre tienen varias soluciones: aquella que se consigue al realizar la ecuación simplemente retirando el valor absoluto, y la que se obtiene al cambiar de signo todo lo que se encontraba dentro del valor absoluto. Así, la ecuación $|x + 8|$ = 2 se resolverá haciendo:

x + 8 = 2 → x = -6 -x – 8 = 2 → x = -10

EJERCICIO RESUELTO

(PAU 2022, ORDINARIA) Calcule los puntos de la recta r $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ **cuya distancia al plano π = x – 1 = 0 es igual a 2.**

El hecho de que en el enunciado se nos hable de una recta puede llevar a confusión y hacernos pensar que nos están pidiendo la distancia entre la recta y el plano, pero si analizamos con detenimiento el enunciado, nos daremos cuenta de que realmente se nos pide la distancia entre un punto y un plano.

Los puntos pertenecientes a la recta r vienen dados por la expresión (λ, λ, λ). Determinemos cuáles distan dos unidades del plano π:

$$d(\pi, A) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 2 \rightarrow \frac{|1\cdot\lambda+0\cdot\lambda+0\cdot\lambda-1|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = 2 \rightarrow \frac{|\lambda-1|}{1} = 2 \rightarrow |\lambda - 1| = 2$$

$$\lambda - 1 = 2 \rightarrow \lambda = 3 \qquad -\lambda + 1 = 2 \rightarrow \lambda = -1$$

Sustituyendo en (λ, λ, λ), obtenemos que (3, 3, 3) y (-1, -1, -1) son los puntos contenidos en la recta r que distan dos unidades del plano π.

PREGUNTA TÍPICA DE PAU

Si bien los ejercicios acerca del cálculo de distancias entre elementos geométricos no son demasiado recurrentes en los exámenes de PAU, cabe destacar que desde 2020 siempre que se ha planteado un problema de este tipo consistía en calcular la distancia entre un punto y un plano.

2.3 Distancia entre un punto y una recta

Se trata de la distancia más corta entre el punto y la recta, y se calcula con la siguiente fórmula:

DISTANCIA ENTRE UN PUNTO Y UNA RECTA

$$d(r, A) = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Donde "A" es el punto, "B" es un punto cualquiera de la recta, y "$\vec{v}$" es el vector director de esta. Así, deberemos:

1. Establecer el vector que une los puntos A y B, restándolos.
2. Multiplicarlo vectorialmente por $\vec{v}$.
3. Hallar el módulo del resultado.
4. Dividir el número obtenido entre el módulo del vector director de la recta.

EJERCICIO RESUELTO

Determina la distancia entre la recta s: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{0}$ y el punto A(2, 1, -1)

$$d(r, A) = \frac{|\overrightarrow{AB}\ x\ \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Tomamos el punto B(2, -3, 0) de la recta. Calculamos $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, -3, 0) - (2, 1, -1) = (0, -4, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \text{ x } \vec{v}_{ds} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2j - (-8k - i) = i + 2j + 8k \rightarrow \vec{u}(1, 2, 8)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{69} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$$

$$d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{AB}\ x\ \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{69}}{\sqrt{5}}\ u$$

2.4 Distancia entre dos planos paralelos

La distancia entre dos planos paralelos será constante en toda su extensión (da igual donde la midamos, siempre será la misma). Para determinarla, aplicaremos la fórmula de la distancia punto-plano:

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS

$$\boldsymbol{d}(\pi, \pi') = \frac{|\mathbf{Ax_o} + \mathbf{By_o} + \mathbf{Cz_o} + \mathbf{D}|}{\sqrt{\mathbf{A^2} + \mathbf{B^2} + \mathbf{C^2}}}$$

Donde A, B, C y D se extraen de la ecuación general de uno de los planos (el que queramos) y x_o, y_o y z_o son las coordenadas de un punto cualquiera por el que pasa el otro plano.

2.5 Distancia entre dos rectas paralelas

Al igual que ocurre con los planos paralelos, la distancia entre dos rectas paralelas será la misma en toda su extensión. Así, también emplearemos la fórmula de la distancia punto-recta para calcular la distancia entre dos rectas, tomando un punto cualquiera de una de ellas.

DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{AB}\ x\ \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Donde "A" es un punto cualquiera de una de las rectas y "B" y $\vec{v}$ son, respectivamente, un punto y el vector director de la otra recta.

2.6 Distancia entre dos rectas que se cruzan

En este caso, la distancia entre las rectas no es la misma en toda su extensión. Hay dos puntos de las rectas que se sitúan más cerca que cualquier otros, y la distancia entre estos será la distancia entre ambas rectas.

DISTANCIA ENTRE RECTAS QUE SE CRUZAN

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{AB}, \vec{v}, \vec{u}|}{|\vec{v}\ x\ \vec{u}|}$$

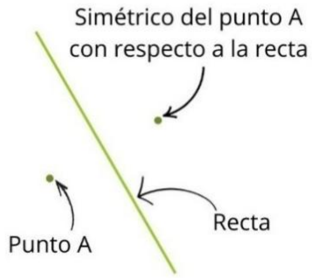
Donde $\vec{u}$ es el vector director de una de las rectas, $\vec{v}$ el de la otra, "A" un punto cualquiera de una de las rectas y "B", un punto aleatorio de la otra. Para determinar la distancia, debemos:

1. Determinar el vector AB (o BA)
2. Realizar el producto mixto entre el vector obtenido en el punto 1 y los vectores directores de las rectas, obteniendo el numerador.
3. Realizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas.
4. Calcular el módulo del vector obtenido en el punto anterior, obteniendo el denominador.

3 Simetría entre elementos

Dos **elementos** son **simétricos** respecto de otro (punto, recta o plano) cuando uno es la imagen del otro mediante una simetría respecto de ese elemento. Esta definición, si bien es matemáticamente correcta no es muy intuitiva, así que, para entenderla, expliquémoslo de un modo informal.

Pongamos, por ejemplo, se desea hallar el punto simétrico a otro con respecto a una recta. Si pusiésemos un espejo sobre la recta, el reflejo del punto se corresponderá con su punto simétrico. Este mismo razonamiento aplica al hacer el punto simétrico con respecto a un plano (colocaríamos nuestro espejo imaginario sobre el plano) o para determinar la recta simétrica con respecto a un plano.



Para poder determinar los diferentes simétricos primeramente debemos conocer el concepto de **punto medio** (M). Este es, tal y como su nombre indica, el punto que se sitúa justo en medio de otros dos, a los que llamaremos Q y P. Se calcula de la siguiente manera:

COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO

$$M_x = \frac{Q_x + P_x}{2} \qquad M_y = \frac{Q_y + P_y}{2} \qquad M_z = \frac{Q_z + P_z}{2}$$

Donde:

- Q_x,Q_y y Q_z son las coordenadas x, y y z del punto Q
- P_x, P_y y P_z son las coordenadas x, y y z del punto P
- M_x, M_y y M_z son las coordenadas x, y y z del punto M

EJERCICIO RESUELTO

Determina las coordenadas del punto medio de los puntos P(2, 1, 1) y Q(-2, 3, 0)

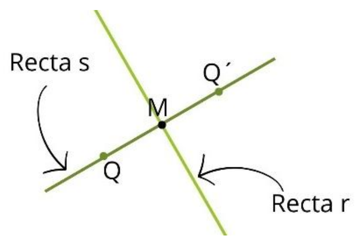
$$M_x = \frac{Q_x + P_x}{2} = \frac{-2+2}{2} = 0 \qquad M_y = \frac{Q_y + P_y}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \qquad M_z = \frac{Q_z + P_z}{2} = \frac{1+0}{-2} = \frac{1}{-2}$$

$$M(0, -2, \frac{1}{-2})$$

Una vez conocido este concepto, pasemos al cálculo de las simetrías.

3.1 Punto simétrico a una recta

Para hallar el punto simétrico (Q´) de otro punto (Q) con respecto a una recta r, debemos tener en cuenta que existe un punto en dicha recta que es el punto medio (M) entre Q y Q´. Este punto M es la intersección entre la recta r y otra recta s, la cual es perpendicular a r y pasa por Q, tal y como se muestra en la imagen.



Una vez se haya determinado M, utilizando las ecuaciones para el cálculo del punto medio, podremos obtener las coordenadas de Q´. Veamos qué pasos debemos seguir calculando el simétrico del punto Q(2, 1, 1) con respecto a la recta r: (x, y, z) = (1, 2, 0) + (1, -1, 2)λ.

1. **Calculamos la recta s perpendicular a r que pasa por Q**. El vector director de esta recta será perpendicular al de la recta r. Utilizando el truco visto en el primer tema para obtener un vector perpendicular a otro, podemos establecer $\vec{v}_{ds}$ = (1, 1, 0).

   Como el siguiente paso será calcular la intersección de las rectas s y r, indicaremos la recta s a través de su ecuación paramétrica:

$$s: \begin{cases} x = 2 + \gamma \\ y = 1 + \gamma \\ z = 1 \end{cases}$$

2. Calculamos el **punto de intersección entre las rectas r y s**, estableciendo la ecuación paramétrica de ambas e igualando sus coordenadas.

$$s: \begin{cases} x = 2 + \gamma \\ y = 1 + \gamma \\ z = 1 \end{cases} \qquad r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2\,\lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + \gamma = 1 + \lambda \rightarrow \lambda = \gamma + 1 \\ 1 + \gamma = 1 - \lambda \rightarrow \lambda = -\gamma \end{cases} \rightarrow \gamma + 1 = -\gamma \rightarrow 2\gamma = -1 \rightarrow \gamma = -\frac{1}{2} \qquad \lambda = -\gamma = \frac{1}{2}$$

   Comprobamos con la tercera ecuación: $1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 1 = 1$ ✓

   Calculamos el punto de corte sustituyendo $\lambda = \frac{1}{2}$ en la ecuación de la recta r (recuerda que también podríamos determinarlo sustituyendo $\gamma = -\frac{1}{2}$ en la recta s):

$$r: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ z = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \qquad \text{Punto de corte } \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

3. Recordamos que el punto de intersección calculado se corresponde con el punto medio (M) entre el punto Q y su simétrico. Utilizaremos las fórmulas del punto medio para hallar Q´:

$$M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \qquad Q(2, 1, 1)$$

$$M_x = \frac{Q_x + Q´_x}{2} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{2 + Q´_x}{2} \rightarrow \frac{3 \cdot 2}{2} = 2 + Q´_x \rightarrow 3 - 2 = Q´_x = 1$$

$$M_y = \frac{Q_y + Q´_y}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1 + Q´_y}{2} \rightarrow \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 + Q´_y \rightarrow 1 - 1 = Q´_y = 0$$

$$M_z = \frac{Q_z + Q´_z}{2} \rightarrow 1 = \frac{1 + Q´_z}{2} \rightarrow 2 = 1 + Q´_z \rightarrow 2 - 1 = Q´_z = 1$$

   El punto simétrico a la recta r es (1, 0, 1)

3.2 Punto simétrico a un plano

Se calcula utilizando un razonamiento similar al del apartado anterior. El simétrico del punto Q con respecto al plano π se puede calcular a través de la fórmula del punto medio (M) entre Q y Q´. Este punto medio será el punto de intersección entre el plano y la recta perpendicular a π que pasa por Q. Los pasos a seguir serán, por lo tanto, los mismos que en el apartado anterior.

PREGUNTA TÍPICA DE PAU

Calcular el punto simétrico con respecto a un plano dado

EJERCICIO RESUELTO

(PAU, 2022 EXTRAORDINARIA) Calcule el punto simétrico de $P(11, -14, 13)$ con respecto al plano π: $3x - 8y + 7z + 8 = 0$.

Construcción de la recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π.

$\vec{n}_{\pi} = \vec{d}_r = (3, -8, 7)$ $\qquad$ $r: \begin{cases} x = 11 + 3\lambda \\ y = -14 - 8\lambda \\ z = 13 + 7\lambda \end{cases}$

Determinamos el punto de corte entre la recta y el plano *(Recordamos que para ello sustituiremos el punto genérico de la recta en el plano)*:

$$3\cdot(11 + 3\lambda) - 8\cdot(-14 - 8\lambda) + 7\cdot(13 + 7\lambda) + 8 = 0 \rightarrow 33+9\lambda+112+64\lambda+91+49\lambda+8 = 0$$

$$122\,\lambda + 244 = 0 \rightarrow \lambda = -2$$

Punto de intersección: $\begin{cases} x = 11 + 3\cdot(-2) = 5 \\ y = -14 - 8\cdot(-2) = 2 \\ z = 13 + 7\cdot(-2) = -1 \end{cases} \rightarrow (5, 2, -1)$

M(5, 2, -1) $\qquad$ $P(11, -14, 13)$

$$M_x = \frac{P_x + P'_x}{2} \rightarrow 5 = \frac{11 + P'_x}{2} \rightarrow 5\cdot 2 = 11 + P'_x \rightarrow 10 - 11 = P'_x = -1$$

$$M_y = \frac{P_y + P'_y}{2} \rightarrow 2 = \frac{-14 + P'_y}{2} \rightarrow 2\cdot 2 = -14 + P'_y \rightarrow 4 + 14 = P'_y = 18$$

$$M_z = \frac{P_z + P'_z}{2} \rightarrow -1 = \frac{13 + P'_z}{2} \rightarrow -1\cdot 2 = 13 + P'_z \rightarrow -2 - 13 = P'_z = -15$$

El simétrico del punto P con respecto al plano π es P´(-1, 18, -15)

3.3 Recta simétrica con respecto a un plano

Para realizar este tipo de ejercicios debemos escoger un punto cualquiera de la recta r (cuya simetría queremos calcular) y hallar su simétrico con respecto al plano, de la misma manera que en el apartado anterior. Una vez calculado el simétrico Q´, debemos notar que la recta simétrica r´ será paralela a la recta r, por lo que tendrán el mismo director y, además, pasará por Q´.

Pongamos por ejemplo que se desea hallar la recta simétrica a r: $\begin{cases} x = 11 + 8\lambda \\ y = -14 + 3\lambda \\ z = 13 \end{cases}$ con respecto al plano π: 3x – 8y + 7z + 8 = 0. Tomaremos un punto cualquiera de r, por ejemplo, Q(11, -14, 13), y hallaremos su simétrico con respecto al plano, el cual resultará ser Q´(-1, 18, -15), tal y como se calculó en el último ejercicio resuelto. Por otro lado, determinamos que $\overrightarrow{v_{dr}}$ = (8, 3, 0). La recta simétrica a r pasará por Q´ y tendrá como $\overrightarrow{v_d}$(8, 3, 0):

r´: (-1, 18, -15) + γ(8, 3, 0)