GEOMETRÍA EN EL ESPACIO.

1. ESPACIOS VECTORIALES

VECTOR FIJO

Segmento orientado. Queda determinado por → Origen **A**(a_1, a_2, a_3); extremo **B**(b_1, b_2, b_3)		
Características:	**Módulo**: Longitud del segmento AB	$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$
	Dirección: Es la recta sobre la que está y todas las paralelas.	
	Sentido: Forma de recorrer el segmento. Cada dirección tiene dos sentidos.	

REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR

Coordenadas cartesianas	Mediante coordenadas cartesianas: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$
Mediante un origen A y un extremo B	$\left.\begin{matrix} A(a_1,a_2,a_3) \\ B(b_1,b_2,b_3) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3\right)$

OPERACOINES CON VECTORES

Suma	$\vec{u}+\vec{v} = \left(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3\right)$
Resta	$\vec{u}-\vec{v} = \left(u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3\right)$
Producto por un escalar	$k\cdot\vec{v} = k\cdot(v_1,v_2,v_3) = (kv_1, kv_2, kv_3)$

Propiedades de las operaciones.
Aplicaciones de los vectores: *- Punto medio - Puntos alineados*

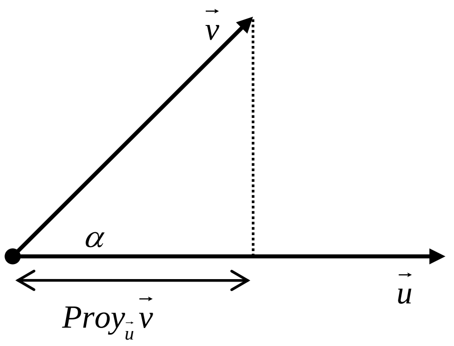
DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Varios vectores se llaman L.D. si alguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás. Cuando no es así, se llaman L.I.	
Combinación lineal	$\vec{v} = \lambda_1\cdot\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\cdot\overrightarrow{u_2}+...+\lambda_n\cdot\overrightarrow{u_n}$ con $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n \in \mathbb{R}$
Linealmente dependientes	$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow L.D. \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow L.I.$
Linealmente dependiente	

BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

En un E.V. un conjunto de vectores forman una base si: 1) Son linealmente independientes. 2) Cualquier vector del E.V. se puede expresar como C.L. de los vectores de la base. • Todas las bases tienen el mismo número de vectores. → Ese número se llama dimensión del E.V.		
Base canónica	Tres vectores perpendiculares y unitarios	$B = \left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}\begin{cases} \vec{i}(1,0,0) \rightarrow \left\|\vec{i}\right\| = 1 \\ \vec{j}(0,1,0) \rightarrow \left\|\vec{j}\right\| = 1 \\ \vec{k}(0,0,1) \rightarrow \left\|\vec{k}\right\| = 1 \end{cases}$

2. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

<table>
<tr><td colspan="3">Se llama producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y se escribe $\vec{u}\cdot\vec{v}$, al número real que resulta al multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman.</td><td>$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\alpha$</td></tr>
<tr><td>Interpretación Geométrica</td><td colspan="2">$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot Proy_{\vec{u}}\vec{v}}$ Proyección de v sobre u
$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{v}\right|\cdot Proy_{\vec{v}}\vec{u}}$ Proyección de u sobre v</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Expresión analítica</td><td colspan="3">$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">Propiedades del producto escalar</td></tr>
</table>

Recuerda:

	0º	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

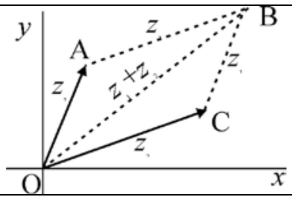
ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\alpha\rightarrow\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$$

$$\cos\alpha=\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}\qquad \alpha=ar\cos\left(\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}\right)$$

3. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

<table>
<tr><td colspan="3">El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u}\times\vec{v}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="3"><u>Elementos</u></td><td>Módulo:</td><td>$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\sin\alpha$</td></tr>
<tr><td>Dirección:</td><td>Perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$</td></tr>
<tr><td>Sentido:</td><td>El del avance de un sacacorchos que gira en sentido positivo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$</td></tr>
</table>

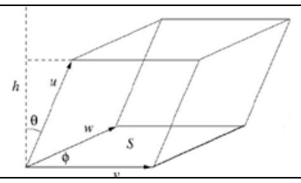
Interpretación geométrica	$\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\| =$ área del paralelogramo	
Expresión analítica	$B=\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$: base canónica $\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\rightarrow u_1\cdot\vec{i}+u_2\cdot\vec{j}+u_3\cdot\vec{k}\\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\rightarrow v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}+v_3\cdot\vec{k}\end{array}\right\}$	$\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$

Propiedades del producto vectorial

APLICACIONES

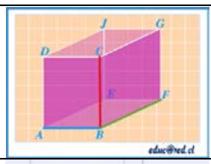
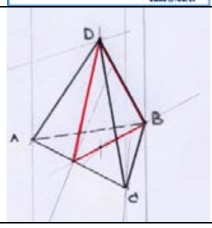
Área triángulo	$A=\dfrac{\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|}{2}$
Área paralelogramo	$A=\left\|\vec{u}\times\vec{v}\right\|$

4. PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES.

El producto mixto de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es un **número real**		$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$
Interpretación geométrica	$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$ = volumen del paralelípedo	
Expresión analítica	$B=\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$: base canónica $\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\rightarrow u_1\cdot\vec{i}+u_2\cdot\vec{j}+u_3\cdot\vec{k}\\ \vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\rightarrow v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}+v_3\cdot\vec{k}\\ \vec{w}=(w_1,w_2,w_3)\rightarrow w_1\cdot\vec{i}+w_2\cdot\vec{j}+w_3\cdot\vec{k}\end{array}\right\}$	$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$

Propiedades del producto mixto

APLICACIONES DEL PRODUCTO MIXTO

Volumen del paralelepípedo	Volumen$=\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right]\right\|$	
Volumen del tetraedro	Volumen$=\dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right\|}{6}$	

5. ECUACIONES DE LA RECTA Y EL PLANO.

ECUACIONES DE LA RECTA

Dados:	• Un punto de la recta: $P(p_1, p_2, p_3)$ • Vector director de la recta: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ^ • Cualquier número real: $\lambda \in \mathbb{R}$	
Ecuación vectorial	$(x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + t \cdot (v_1, v_2, v_3)$	
Ecuación paramétrica	$r: \left. \begin{array}{l} x = p_1 + \lambda v_1 \\ y = p_2 + \lambda v_2 \\ z = p_3 + \lambda v_3 \end{array} \right\}$	
Ecuación continua	$\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2} = \dfrac{z - p_3}{v_3}$	
Ecuación general, implícita o cartesiana	$r: \left. \begin{array}{l} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{array} \right\}$	Intersección de dos planos
	Pasar de ecuación general a paramétrica	

ECUACIONES DEL PLANO

Dados:	• Un punto del plano: $P(p_1, p_2, p_3)$ • Vectores directores del plano: $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ^ • Cualquier número real: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Ecuación vectorial	$\pi: (x, y, z) = (p_1, p_2, p_3) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$
Ecuación paramétrica	$\pi: \left\{ \begin{array}{l} x = p_1 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y = p_2 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z = p_3 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{array} \right.$
Ecuación general o implícita	$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - p_1 \\ u_2 & v_2 & y - p_2 \\ u_3 & v_3 & z - p_3 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{\text{Desarrollando}} Ax + By + Cz + D = 0$
	$\vec{n} = (A, B, C)$ vector perpendicular (normal) al plano
	Pasar de ecuación general a paramétrica

6. POSICIONES DE RECTAS Y PLANOS.

POSICIONES DE DOS RECTAS

OPCIÓN A

$$r:\left.\begin{matrix} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 \end{matrix}\right\} \qquad s:\left.\begin{matrix} x = q_1 + \mu v_1 \\ y = q_2 + \mu v_2 \\ z = q_3 + \mu v_3 \end{matrix}\right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & q_1 - p_1 \\ u_2 & v_2 & q_2 - p_2 \\ u_3 & v_3 & q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$

**También ecuación vectorial o continua*

OPCIÓN B

$$r:\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A'_1 x + B'_1 y + C'_1 z + D'_1 = 0 \end{cases} \quad M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_2 & B'_2 & C'_2 \end{pmatrix}$$

$$s:\begin{cases} A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \\ A'_2 x + B'_2 y + C'_2 z + D'_2 = 0 \end{cases} \quad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{pmatrix}$$

Opción	A		B	
Rango	M	M*	M	M*
COINCIDENTES	1	1	2	2
	SCI		SCI	
PARALELAS	1	2	2	3
	SI		SI	
SECANTES (se cortan)	2	2	3	3
	SCD		SCD	
SE CRUZAN	2	3	3	4
	SI		SI	

Otra forma de estudiar la posición de las rectas (Opción A)		
Si: $\dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{u_3}{v_3} \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$	COINCIDENTES	$P \in r \to P \in s$
	PARALELAS	$P \in r \to P \notin s$
Si no: $\dfrac{u_1}{v_1} = \dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{u_3}{v_3} \Rightarrow \vec{u} \nparallel \vec{v}$	SE CORTAN	$\lvert M^* \rvert = 0$
	SE CRUZAN	$\lvert M^* \rvert \neq 0$

POSICIONES DE RECTA Y PLANO

$$r: \left.\begin{array}{l} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 \end{array}\right\} \qquad \pi: \left.\begin{array}{l} x = q_1 + \mu v_1 + \alpha w_1 \\ y = q_2 + \mu v_2 + \alpha w_2 \\ z = q_3 + \mu v_3 + \alpha w_3 \end{array}\right\}$$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} u_1 & v_1 & w_1 & q_1 - p_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & q_2 - p_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 & q_3 - p_3 \end{array}\right)$$

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A'_1x + B'_1y + C'_1z + D'_1 = 0 \end{cases} \qquad \pi: Ax + By + Cz + D = 0$$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A & B & C & D \end{array}\right)$$

Rango	M	M*
RECTA CONTENIDA EN EL PLANO	2	2
	SCI	
RECTA Y PLANO PARALELOS	2	3
	SI	
RECTA CORTA AL PLANO	3	3
	SCD	

Otra forma:		
$r: \left.\begin{array}{l} x = p_1 + \lambda u_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 \end{array}\right\}$	$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$	
Se sustituyen las coordenadas del punto genérico de la recta en la ecuación del plano: $A(p_1 + \lambda u_1) + B(p_2 + \lambda u_2) + C(p_3 + \lambda u_3) + D = 0 \Rightarrow a\lambda = b$		
$a\lambda = b \rightarrow$	$a \neq 0 \rightarrow SCD \rightarrow$ Solución única	**SE CORTAN**
	$a = 0, b \neq 0 \rightarrow SI \rightarrow \nexists$ solución	**PARALELAS**
	$a = 0, b = 0 \rightarrow SCI \rightarrow$ Infinitas soluciones	**CONTENIDA**

POSICIONES DE DOS PLANOS

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$$
$$\pi': A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

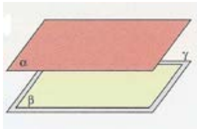
$$M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

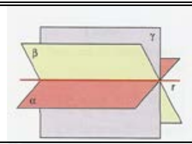
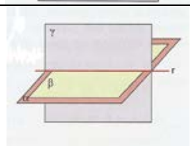
Rango	M	M*	**Otra forma**
PLANOS COINCIDENTES	1	1	Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$
	SCI		
PLANOS PARALELOS	1	2	Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$
	SI		
PLANOS SECANTES	2	2	Si <u>NO</u> $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$
	SCD		

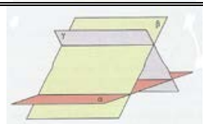
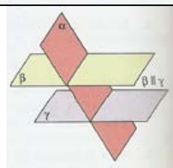
POSICIONES RELATIVAS DE TRES PLANOS

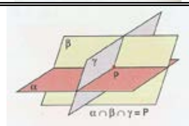
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="2">Rango</th><th rowspan="2"></th><th rowspan="2"></th></tr>
<tr><th>M</th><th>M*</th></tr>
<tr><td rowspan="8">$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$
$\alpha : A'x + B'y + C'z + D' = 0$
$\beta : A''x + B''y + C''z + D'' = 0$

$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{array} \right)$</td><td>1</td><td>1
SCI</td><td>TRES PLANOS COINCIDENTES</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">1

SI</td><td rowspan="2">2</td><td>TRES PLANOS PARALELOS</td><td></td></tr>
<tr><td>DOS PLANOS COINCIDENTES Y PARALELOS A UN TERCERO</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2

SCI</td><td rowspan="2">2</td><td>TRES PLANOS SE CORTAN EN UNA RECTA</td><td></td></tr>
<tr><td>DOS PLANOS COINDICENTES CORTAN A UN TERCERO</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">2

SI</td><td rowspan="2">3</td><td>TRES PLANOS SE CORTAN DOS A DOS</td><td></td></tr>
<tr><td>DOS PLANOS PARALELOS CORTADOS POR UN TERCERO</td><td></td></tr>
<tr><td>3

SCD</td><td>3</td><td>TRES PLANOS SE CORTAN EN UN PUNTO</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">Cuando al estudiar los rangos nos encontramos con dos posibles posiciones de los planos, tenemos que estudiar las posiciones de los planos dos a dos para comprobar cuál de las dos opciones se está dando.</td></tr>
</table>

7. PROYECCIONES ORTOGONALES EN EL ESPACIO.

PROYECCIÓN DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA

Para obtener la proyección ortogonal de Q en la recta r.	$Q(q_1,q_2,q_3)$ $r:\left.\begin{array}{l} x=p_1+u_1\lambda \\ y=p_2+u_2\lambda \\ z=p_3+u_3\lambda \end{array}\right\}$
1º Hallamos la ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto (Q) que queremos proyectar.	$\vec{u}=\vec{n}=(u_1,u_2,u_3)$ ➔ $\pi: u_1x+u_2y+u_3z+D=0$ Para calcular D ➔ $\pi: u_1q_1+u_2q_2+u_3q_3+D=0$ Tenemos, entonces ➔ $\pi: Ax+By+Cz+D=0$
2º Calculamos el punto de corte de la recta con el plano que hemos hallado, y ese punto será la proyección ortogonal.	$\pi: A(p_1+u_1\lambda)+B(p_2+u_2\lambda)+C(p_3+u_3\lambda)+D=0$ Calculamos λ y sustituimos en r para obtener el punto de corte.

PROYECCIÓN DE UN PUNTO SOBRE UN PLANO

Para obtener la proyección ortogonal de Q en el plano π	$Q(q_1,q_2,q_3)$ $\pi: Ax+By+Cz+D=0$
1º Hallamos la ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto (Q) que queremos proyectar.	Tenemos, $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ $r:\left.\begin{array}{l} x=q_1+A\lambda \\ y=q_2+B\lambda \\ z=q_3+C\lambda \end{array}\right\}$
2º Calculamos el punto de corte del plano con la recta que hemos hallado, y ese punto será la proyección ortogonal.	$\pi: A(q_1+A\lambda)+B(q_2+B\lambda)+C(q_3+C\lambda)+D=0$ Calculamos λ y sustituimos en r para obtener el punto de corte.

PROYECCIÓN DE UNA RECTA SOBRE UN PLANO

Para obtener la proyección ortogonal de la recta r en el plano π	$r:\left.\begin{array}{l} x=p_1+u_1\lambda \\ y=p_2+u_2\lambda \\ z=p_3+u_3\lambda \end{array}\right\}$ $\pi: Ax+By+Cz+D=0$
1º Hallamos el vector director de la recta, el vector normal al plano y un punto de la recta.	$\vec{n}=(A,B,C)$; $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$; $P(p_1,p_2,p_3)$
2º Calculamos el plano π' que pasa por el punto P y tienen como vectores directores el vector director de la recta y el vector normal del plano π.	$\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}=0$ Obtenemos: $\pi': A'x+B'y+C'z+D'=0$
3º Hallamos el corte de los dos planos, π y π', que es la recta s, proyección ortogonal de r sobre π	

También se pueden buscar dos punto de r; obtener su proyección en π y obtener la recta a partir de estos dos nuevos puntos.

8. DISTANCIAS EN EL ESPACIO.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

$P(p_1, p_2, p_3)$ $Q(q_1, q_2, q_3)$	$d(P,Q)=\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

I	$r: \left.\begin{array}{r} x=q_1+u_1\lambda \\ y=q_2+u_2\lambda \\ z=q_3+u_3\lambda \end{array}\right\}$	1º Buscamos la proyección ortogonal (P') de P en r. 2º $d(P,r)=d(P,P')$
II		$d(P,r)=\dfrac{\lvert \overrightarrow{QP}\times\vec{u}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

$P(p_1, p_2, p_3)$ $\pi: Ax+By+Cz+D=0$	$d(P,\pi)=\dfrac{\lvert Ap_1+Bp_2+Cp_3+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS

I	$\pi: Ax+By+Cz+D=0$ $\pi': A'x+B'y+C'z+D'=0$	Si se cortan: $d(\pi,\pi')=0$
II		Si se coinciden: $d(\pi,\pi')=0$
III		Si son paralelos: $d(\pi,\pi')=\dfrac{\lvert D-D'\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

DISTANCIA DE UNA RECTA A UN PLANO

I	$r: \left.\begin{array}{r} x=q_1+u_1\lambda \\ y=q_2+u_2\lambda \\ z=q_3+u_3\lambda \end{array}\right\}$ $\pi: Ax+By+Cz+D=0$	Si la recta y el plano se cortan: $d(r,\pi)=0$
II		Si la recta está en el plano: $d(r,\pi)=0$
III		Si la recta y el plano son paralelos: $d(r,\pi)=d(Q,\pi)$ con $Q\in r$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS

I	Si se cortan	$d(r,s)=0$	$r:\left.\begin{aligned}x&=p_1+u_1\lambda\\y&=p_2+u_2\lambda\\z&=p_3+u_3\lambda\end{aligned}\right\}$ $s:\left.\begin{aligned}x&=q_1+v_1\mu\\y&=q_2+v_2\mu\\z&=q_3+v_3\mu\end{aligned}\right\}$ $\pi:(x,y,z)=P+\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}$
II	Si son paralelas	$d(r,s)=d(P,s)\,/\,P\in r$	
III	Si se cruzan		
	OPCIÓN A	$d(r,s)=\dfrac{\left\lvert\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right]\right\rvert}{\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert}$	
	OPCIÓN B	Hallamos el plano π que contiene a r y es paralelo a s. $d(r,s)=d(Q,\pi)$	
	OPCIÓN C	$d(r,s)=\left\lvert\overrightarrow{RS}\right\rvert$; donde: $\left.\begin{aligned}&R\in r\to(p_1+u_1\lambda,\,p_2+u_2\lambda,\,p_3+u_3\lambda)\\&S\in s\to(q_1+v_1\mu,q_2+v_2\mu,q_3+v_3\mu)\\&\overrightarrow{RS}\perp r\Rightarrow\overrightarrow{RS}\cdot\vec{u}=0\\&\overrightarrow{RS}\perp s\Rightarrow\overrightarrow{RS}\cdot\vec{v}=0\end{aligned}\right\}$ Resolvemos el sistema	
	OPCIÓN D	$d(r,s)=\left\lvert\overrightarrow{RS}\right\rvert$; donde: Hallo $\vec{w}\,/\,\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ Hallo el plano α determinado por $\vec{u},\vec{w},P$ Hallo el plano β determinado por $\vec{v},\vec{w},Q$ Hallo la recta *t*, intersección de α y β R punto de intersección entre α y *t* S punto de intersección entre β y *t*	

9. ÁNGULOS.

ÁNGULO QUE FORMAN DOS RECTAS

Ángulo	**Perpendicularidad**	**Paralelos**	
$\cos\alpha=\dfrac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}$ $\alpha=ar\cos\left(\dfrac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{v}\rvert}\right)$	$r\perp s\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ $u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3=0$	$r\parallel s\Rightarrow\vec{u}\parallel\vec{v}$ $\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{u_2}{v_2}=\dfrac{u_3}{v_3}$	$r:\left.\begin{aligned}x&=p_1+u_1\lambda\\y&=p_2+u_2\lambda\\z&=p_3+u_3\lambda\end{aligned}\right\}$ $s:\left.\begin{aligned}x&=q_1+v_1\mu\\y&=q_2+v_2\mu\\z&=q_3+v_3\mu\end{aligned}\right\}$

ÁNGULOS QUE FORMAN UNA RECTA Y UN PLANO

Ángulo	**Perpendicularidad**	**Paralelos**	
$\cos\alpha=\dfrac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$ $\alpha=90^{\circ}-ar\cos\left(\dfrac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}\right)$	$r\perp\pi\Rightarrow\vec{u}\parallel\vec{n}$ $\dfrac{u_1}{A}=\dfrac{u_2}{B}=\dfrac{u_3}{C}$	$r\parallel\pi\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ $u_1\cdot A+u_2\cdot B+u_3\cdot C=0$	$r:\left.\begin{aligned}x&=p_1+u_1\lambda\\y&=p_2+u_2\lambda\\z&=p_3+u_3\lambda\end{aligned}\right\}$ $\pi:Ax+By+Cz+D=0$ $\vec{n}=(A,B,C)$

ÁNGULO QUE FORMAN DOS PLANOS

Ángulo	**Perpendicularidad**	**Paralelismo**	
$\cos\alpha = \dfrac{\lvert\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\rvert}{\lvert\vec{n_1}\rvert\cdot\lvert\vec{n_2}\rvert}$ $\alpha = ar\cos\left(\dfrac{\lvert\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\rvert}{\lvert\vec{n_1}\rvert\cdot\lvert\vec{n_2}\rvert}\right)$	$\pi \perp \pi' \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{n'}=0$ $A\cdot A'+B\cdot B'+C\cdot C'=0$	$\pi \parallel \pi' \Rightarrow \vec{n}\parallel\vec{n'}$ $\dfrac{A}{A'}=\dfrac{B}{B'}=\dfrac{C}{C'}$	$\pi : Ax+By+Cz+D=0$ $\vec{n}=(A,B,C)$ $\pi' : A'x+B'y+C'z+D'=0$ $\vec{n'}=(A',B',C')$

10. OTROS CONCEPTOS IMPORTANTES

Punto medio	Dados dos puntos: $P(p_1,p_2,p_3)$ y $Q(q_1,q_2,q_3)$	$\left(\dfrac{p_1+q_1}{2},\dfrac{p_2+q_2}{2},\dfrac{p_3+q_3}{2}\right)$

Punto simétrico	El simétrico de $P(p_1,p_2,p_3)$ respecto de $Q(q_1,q_2,q_3)$	$(2q_1-p_1, 2q_2-p_2, 2q_3-p_3)$

Obtención de un vector perpendicular …

…a uno dado	$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$	Obtenemos $\vec{w} / \vec{u}\perp\vec{w} \rightarrow = \vec{w}(-u_2,u_1,0)$
…a otros dos	Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$	Obtenemos $\vec{w} / \vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$

Obtener vector director de una recta en forma implícita

$r: \left.\begin{matrix} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{matrix}\right\}$	$\vec{u}=(A,B,C)\times(A',B',C')$